Metodología y tecnología de la programación

Ingeniería Informática (UCM)

Hoja de ejercicios 7 Curso 2007/2008

Ejercicios de coste amortizado

Ejercicio 1

- Si la multipila vista en clase incluyese una operación *multiapilar* que apilara k elementos en la pila, ¿se seguiría teniendo un coste amortizado constante para las operaciones?
- Demostrar que si en el ejemplo del contador binario se tuviera una operación *decrementar*, n operaciones podrían tener un coste en $\Theta(nk)$.

Ejercicio 2 Se realiza una secuencia de n operaciones sobre una estructura de datos. La operación i-ésima tiene un coste igual a i si i es una potencia de 2 y, en caso contrario, igual a 1. Utilizar el método de agregación para determinar el coste amortizado de las operaciones.

Ejercicio 3 Sea una estructura de datos sobre una lista inicialmente vacía, que dispone de las siguientes dos operaciones: `añadir-número`, que añade un número al comienzo de la lista; `reducir-lista`, que recorre la lista, computa la suma de todos los números que lee y crea una nueva lista con dicha suma como único elemento. Demostrar que el coste amortizado de las operaciones es $O(1)$ utilizando el método del potencial.

Ejercicio 4 Supongamos que quisiéramos no solo incrementar el contador binario sino también resetearlo a cero (poner todos sus bits a 0). Mostrar cómo implementarlo como un vector de bits de modo que cualquier secuencia de operaciones `incrementar` y `resetear` tenga coste $O(n)$ al ejecutarse sobre un contador inicialmente igual a 0.

Ejercicio 5 Demostrar que se puede implementar una cola con operaciones `añadir` y `eliminar` mediante dos pilas, de forma que el coste amortizado de estas dos operaciones sea constante.

Ejercicio 6 Supongamos que queremos realizar `buscar` e `insertar` sobre un conjunto de n elementos. Sea $k = \lceil \lg(n+1) \rceil$ y $\langle n_{k-1}, \dots, n_0 \rangle$ la representación binaria de n. Tenemos k vectores ordenados, $A_0, A_1, \dots, A_{k-1}$, donde la longitud de A_i es 2^i. Cada vector está o bien lleno o bien vacío, dependiendo de si n_i es 1 o 0, respectivamente. El número total de elementos almacenados en los k vectores es por tanto $\sum_{i=0}^{k-1} n_i 2^i = n$. Aunque cada vector individual está ordenado, no existe ninguna relación entre los elementos de vectores distintos.

1. Describir cómo implementar `buscar`. Analizar su tiempo de ejecución en el peor caso.
2. Describir cómo insertar un nuevo elemento en esta estructura y calcular su coste amortizado.

Ejercicio 7 Demostrar que si $\alpha_{i-1} \geq 1/2$ y la operación i-ésima sobre una tabla dinámica es `eliminar`, entonces el coste amortizado de la operación con respecto a la función de potencial está acotado superiormente por una constante.