Especificación y Verificación de Software

Máster en Investigación en Informática (UCM)

Hoja 1 Curso 2009/2010

Ejercicio 1 Sea Σ la signatura

```
sort Nat .
op 0 : -> Nat .
op s : Nat -> Nat .
```

y sea $A = \{a, b, c\}$. ¿Cuántas Σ-álgebras distintas se pueden definir sobre el conjunto A? Justifica de dónde se obtiene dicho número. Con ayuda de tu justificación, ¿puedes predecir cuántas álgebras habrá sobre A si añadimos a Σ una función binaria, digamos, `op _+_ : Nat Nat -> Nat`?

Ejercicio 2 Dada una signatura Σ, un *homomorfismo* h entre (S, Σ)-álgebras $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ es un conjunto de funciones $\{h : A_s \longrightarrow B_s \mid s \in S\}$ tal que

$$h_s(A_f(a_1, \ldots, a_n)) = B_f(h_{s_1}(a_1), \ldots, h_{s_n}(a_n))$$

para todo $f \in \Sigma_{s_1 \ldots s_n, s}$. En particular, si $f \in \Sigma_{\epsilon, s}$ es una constante, $h_s(A_f) = B_f$. Si cada h_s es una función biyectiva, se dice que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son *isomorfas*. Demuestra que los números naturales "habituales" con el cero y el sucesor y los números naturales en base 2 son Σ-álgebras isomorfas (Σ es la del ejercicio 1, sin considerar la operación _+_).

Ejercicio 3 De nuevo con la signatura del ejercicio 1, ¿cuántas Σ-álgebras no isomorfas se pueden definir sobre A?

Ejercicio 4 Dada una signatura Σ y un conjunto de ecuaciones E, el álgebra $\mathcal{T}_{\Sigma,E}$ satisface la propiedad de que, dada una (S, Σ)-álgebra $\mathbf{A}$ que satisfaga E, existe un único homomorfismo $h : \mathbf{A} \longrightarrow \mathcal{T}_{\Sigma,E}$. Cualquier álgebra con la propiedad anterior se llama *inicial*. Demuestra que una (Σ, E)-álgebra $\mathbf{A}$ es inicial si y solo si es isomorfa a $\mathcal{T}_{\Sigma,E}$.

Ejercicio 5

1. ¿Encaja $g(x)$ con $h(g(a))$?
2. ¿Y $f(x, x)$ con $f(a, b)$?
3. ¿Encaja $f(x, x)$ con algún subtérmino de $f(g(f(a, a)), f(a, z))$?
4. ¿Encaja `0 + x` con algún subtérmino de `s(s(0 + s(0))) + 0` en el módulo predefinido `NAT` de Maude?

Ejercicio 6 Considera la especificación $\{f(x, y, z) = g(y)\}$. Demuestra que $f(a, b, b) \to g(b)$ y $h(g(b), f(a, g(x), h(z))) \to h(g(b), g(g(x)))$, determinando la posición y la sustitución utilizadas (observa que estos términos hacen uso de dos operaciones con nombre h: una binaria y la otra unaria). ¿Cuántas reducciones son posibles a partir del término

$$g(h(f(b, g(f(a, b, c)), c), f(f(a, a, a), b, c)))?$$

Ejercicio 7 Demuestra que la especificación

$$\{f(a, b, x) = f(x, x, x), g(x, y) = x, g(x, y) = y\}$$

no es terminante.

Ejercicio 8 Considera la especificación $\{f(g(x)) = g(f(x))\}$.

- ¿Cuál es la (única) forma normal de $g(f(f(g(f(g(a))))))$?
- Argumenta informalmente que la especificación es terminante.