Lógica

Ingeniería Informática (UCM)

Hoja de ejercicios 9 Curso 2006/2007

Ejercicios de sintaxis, semántica y sustituciones

Ejercicio 1 Formaliza los siguientes enunciados en el lenguaje de la lógica de predicados, explicando cuá es el universo del discurso esperado en cada caso:

1. Ramón Mercader asesinó a León Trotski.
2. La esposa del rey Arturo fue la reina Ginebra.
3. Todas las mujeres son inefables.
4. La reina Ginebra solo fue amada por caballeros.
5. Entre los vampiros se dan casos de hemofilia.

Ejercicio 2 Define recursivamente una aplicación "lig" que haga corresponder a cada Σ-fórmula φ el conjunto finito $\mathrm{lig}(\varphi)$ formado por todas las variables que aparezcan ligadas en φ.

Ejercicio 3 Determina los conjuntos de variables libres y ligadas de las siguientes fórmulas. Si no son disjuntos, construye una variante de la fórmula en la cual ninguna variable aparezca a la vez libre y ligada.

1. $\exists z\ (g(x, f(z)) = y)$
2. $\forall x \exists y\ (R(x, y) \wedge \exists x (y = g(x, x)))$
3. $\exists x\ (R(x, y) \wedge \forall y\ \neg(g(y, y) = x))$

Ejercicio 4 Considera el universo formado por todos los seres humanos y los predicados siguientes:

1. La propiedad de ser hombre.
2. La propiedad de ser mujer.
3. La relación que se da entre una persona y sus dos progenitores.

Elige una signatura Σ adecuada y define una Σ-estructura $\mathcal{A}$ que represente el universo de los seres humanos acompañado de esos predicados. A continuación, construye fórmulas que al ser interpretadas en $\mathcal{A}$ expresen lo que dicen los siguientes enunciados; cada fórmula deberá tener como variables libres las que aparecen en el enunciado correspondiente.

1. x e y tienen el mismo sexo.
2. x es padre de y.
3. x es madre de y.
4. x e y son hermanos (no importa el sexo).
5. x e y son primos.

Ejercicio 5 Para la signatura Σ_{ar} y la estructura $\mathcal{N}$:

1. Construye dos términos cerrados diferentes t_1 y t_2 tales que $[\![t_1]\!]^{\mathcal{N}} = [\![t_2]\!]^{\mathcal{N}}$.
2. Razona que para cualquier número $n \in \mathbb{N}$ puede encontrarse un término cerrado $t \in T_{\Sigma_{ar}}$ tal que $[\![t]\!]^{\mathcal{N}} = n$.

Ejercicio 6 Sean las fórmulas cerradas

$$\varphi_{\geq 2} \equiv \exists x_0 \exists x_1\ \neg(x_0 = x_1) \qquad \varphi_{\leq 2} \equiv \exists x_0 \exists x_1 \forall y\ (y = x_0 \vee y = x_1)$$

1. $\varphi_{\geq 2}$ formaliza "hay al menos 2 individuos" y $\varphi_{\leq 2}$ formaliza "hay a lo sumo 2 individuos". Razona por qué.

2. Demuestra que para todo $n \geq 1$ pueden construirse fórmulas cerradas $\varphi_{\geq n}$, $\varphi_{\leq n}$ de vocabulario vacío, que formalizan "hay al menos n individuos" y "hay a lo sumo n individuos", respectivamente.
3. Discute el significado de las fórmulas siguientes:

$$\neg\varphi_{\geq n} \qquad \neg\varphi_{\leq n} \qquad \varphi_{\geq n} \vee \varphi_{\leq n}$$

Ejercicio 7 Considera la signatura $\Sigma = \{R\}$. Escribe tres fórmulas cerradas φ_1, φ_2 y φ_3 de tal forma que para toda estructura $\mathcal{A} = (A, R^{\mathcal{A}})$ que las satisfaga se cumpla que $R^{\mathcal{A}}$ sea una relación de equivalencia.

Ejercicio 8 Sea Σ una signatura. La familia de las Σ-fórmulas *existenciales* se define como el menor conjunto de Σ-fórmulas que cumple:

- cualquier fórmula sin cuantificadores es existencial;
- si φ_1 y φ_2 son existenciales, también lo son $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ y $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$.
- si φ es existencial, también lo es $\exists x\ \varphi$.

Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ estructuras. $\mathcal{A}$ es subestructura de $\mathcal{B}$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, si $A \subseteq B$ y todos los símbolos de Σ se interpretan en $\mathcal{A}$ como las restricciones de las correspondientes interpretaciones en $\mathcal{B}$. Sea $\sigma : V \longrightarrow A$ un estado. Demuestra:

1. $[\![t]\!]^{\mathcal{A}}\sigma = [\![t]\!]^{\mathcal{B}}\sigma$, para todo término t.
2. $\mathcal{A} \vDash \varphi\sigma \Rightarrow \mathcal{B} \vDash \varphi\sigma$, para toda fórmula existencial φ.

Ejercicio 9 Demuestra que el resultado de aplicar consecutivamente dos sustituciones depende en general del orden en que estas se apliquen, tanto para términos como para fórmulas.

Ejercicio 10 Dadas n variables distintas $x_1, \ldots, x_n$ y n términos $t_1, \ldots, t_n$ busca definiciones para

- $s[x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n]$
- $\varphi[x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n]$

que corresponden a la idea de sustituir *simultáneamente* cada x_i por t_i.