Teoría de autómatas y lenguajes formales

Ingeniería Técnica en Informática de Sistemas (UCM)

Hoja de ejercicios 7 Curso 2009/2010

Ejercicios sobre máquinas de Turing

Ejercicio 1 Diseña una máquina de Turing que reconozca el lenguaje $L = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid |w| \text{ es par}\}$. ¿Qué computación se obtiene sobre la entrada $caabbc$?

Ejercicio 2 (Hopcroft 8.2.3) Diseña una máquina de Turing que reciba como entrada el símbolo \$ seguido de un número n en base 2 y devuelva $n+1$, también en binario. La cabeza de la cinta inicialmente señala el símbolo \$ y la máquina debe pararse con la cabeza señalando el símbolo más a la izquierda de $n+1$. Por ejemplo, $q_0\$10011 \vdash^* \$q_f10100$ y $q_0\$11111 \vdash^* q_f100000$. Muestra la secuencia de configuraciones para la entrada \$111.

Ejercicio 3 Dada una secuencia de símbolos sobre $\Sigma = \{a,b\}$, construye una máquina de Turing que devuelva la secuencia resultante de tomar un símbolo de cada tres, empezando por el primero.

Ejercicio 4 Una máquina de Turing se para si entra en un estado q señalando un símbolo X de la cinta tal que $\delta(q,X)$ no está definido. Dada una máquina de Turing M, se define $L'(M)$ como el lenguaje de todas las cadenas sobre las que M para. Demuestra que el conjunto de los lenguajes definidos por máquinas de Turing atendiendo a los estados finales coincide con el conjunto de los lenguajes aceptados por máquinas de Turing atendiendo a su parada; es decir:

$$\{L(M) \mid M \text{ máquina de Turing}\} = \{L'(M) \mid M \text{ máquina de Turing}\}.$$

Ejercicio 5 (Hopcroft 8.2.5) Determina, informalmente, el lenguaje aceptado por la máquina de Turing $M = (\{q_0,q_1,q_2,q_f\},\{0,1\},\{0,1,\#\},\delta,q_0,\#,q_f)$, cuando:

1. $\delta(q_0,0) = (q_1,1,\rightarrow)$, $\delta(q_1,1) = (q_0,0,\rightarrow)$, $\delta(q_1,\#) = (q_f,\#,\rightarrow)$.
2. $\delta(q_0,0) = (q_0,\#,\rightarrow)$, $\delta(q_0,1) = (q_1,\#,\rightarrow)$, $\delta(q_1,1) = (q_1,\#,\rightarrow)$, $\delta(q_1,\#) = (q_f,\#,\rightarrow)$.

Ejercicio 6 Describe informalmente una máquina de Turing que, dada una lista de palabras sobre $\{0,1\}$ separadas por $*$, acepte si todas las cadenas son distintas. Se trata, por tanto, de reconocer el lenguaje

$$E = \{*x_1*x_2*\ldots*x_n \mid x_i \in \{0,1\}^* \text{ y } x_i \neq x_j \text{ para cada } i \neq j\}.$$

Ejercicio 7 (Hopcroft 8.4.1) De manera informal pero clara, describe las máquinas de Turing de varias cintas que aceptan los siguientes lenguajes, procurando que operen en tiempo proporcional a la longitud de la entrada.

1. El conjunto de cadenas con el mismo número de ceros que de unos.
2. $\{a^nb^nc^n \mid n \geq 1\}$.

Ejercicio 8 Una máquina con k pilas es un autómata con pila determinista, pero con k pilas. Un movimiento de esta máquina depende del estado actual, del símbolo de entrada leído y de la cima de cada una de las pilas, y da lugar a un nuevo estado y a reemplazar el símbolo en la cima de cada pila por una cadena de símbolos, posiblemente distinta para cada una. Por tanto, una regla de transición típica tiene la forma

$$\delta(q,a,X_1,\ldots,X_k) = (p,\gamma_1,\ldots,\gamma_k).$$

Se supone, además, que existe un símbolo especial \$ que solo aparece al final de la entrada de la máquina con k pilas y que no forma parte de la misma. Demuestra que si L es un lenguaje aceptado por una máquina de Turing entonces L también es aceptado por una máquina con 2 pilas.

Ejercicio 9 (Septiembre 2009) Diseña una máquina de Turing que multiplique por dos un número en base 10. Inicialmente el número se encontrará en la cinta (un dígito en cada casilla) y la cabeza lectora apuntará al dígito situado más a la izquierda. Al detenerse, la máquina deberá haber sustituido el número por el resultado y la cabeza lectora quedará apuntando al dígito más a la izquierda.