Teoría de autómatas y lenguajes formales

Ingeniería Técnica en Informática de Sistemas (UCM)

Hoja de ejercicios 6 Curso 2009/2010

Ejercicios sobre propiedades de los LI

Ejercicio 1 Sean G una gramática incontextual y G' obtenida a partir de G eliminando los símbolos no generadores y aquellas producciones en las que intervengan. Demuestra que $L(G) = L(G')$.

Ejercicio 2 (Junio 2005, Hopcroft 7.1.2 y 7.1.4) Aplica un método sistemático para pasar las siguientes gramáticas incontextuales a FNC. El símbolo inicial es I. No es necesario que muestres cómo aplicas cada paso de tu método: solo se pide que muestres la gramática que resulta después de aplicar cada uno de los pasos, así como la gramática final.

1. $$\begin{aligned} I &\to aAB \\ A &\to BAb \mid \epsilon \mid B \\ B &\to a \mid b \mid CD \\ C &\to ba \\ D &\to DD \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} I &\to AIB \mid \epsilon \\ A &\to aAI \mid a \\ B &\to IbI \mid A \mid bb \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} I &\to AAA \mid B \\ A &\to aA \mid B \\ B &\to \epsilon \end{aligned}$$

Ejercicio 3 (Hopcroft 7.1.10) ¿Es posible determinar, para todo lenguaje incontextual sin ϵ, una gramática tal que todas sus producciones sean de la forma $A \to BCD$ o de la forma $A \to a$? Demuéstralo o encuentra un contraejemplo.

Ejercicio 4 (Hopcroft 7.2.1) Demuestra que los siguientes lenguajes no son incontextuales:

1. $\{a^i b^j c^k \mid i < j < k\}$.
2. $\{a^n b^n c^i \mid i \le n\}$.
3. $\{0^i 1^j \mid j = i^2\}$.
4. $\{a^n b^n c^i \mid n \le i \le 2n\}$.

Ejercicio 5 (Hopcroft 7.3.2) Sean los lenguajes $L_1 = \{a^n b^{2n} c^m \mid n, m \ge 0\}$ y $L_2 = \{a^n b^m c^{2m} \mid n, m \ge 0\}$. Demuestra que L_1 y L_2 son incontextuales. ¿Es $L_1 \cap L_2$ un lenguaje incontextual?

Ejercicio 6 Demuestra que el lenguaje $L^R = \{w^R \mid w \in L\}$ es incontextual si L lo es.

Ejercicio 7 (Hopcroft 7.3.1) Dado un lenguaje L, se define *inicio*$(L) = \{w \mid wx \in L$ para algún $x\}$. Demuestra que *inicio*(L) es incontextual si L lo es.

Ejercicio 8 (Hopcroft 7.4.1) Describe algoritmos para decidir lo siguiente:

1. ¿Es finito $L(G)$ para una GI G dada?
2. ¿Contiene $L(G)$ al menos 100 cadenas para una GI G dada?

Ejercicio 9 (Hopcroft 7.4.4) Demuestra que en cualquier gramática en FNC todos los árboles de derivación para las cadenas de longitud n tienen $2n - 1$ nodos internos.

Ejercicio 10 (Septiembre 2009) Responde a las siguientes cuestiones:

1. ¿Existe algún lenguaje incontextual que no sea regular? Si la respuesta es afirmativa, pon un ejemplo; en caso contrario, demuéstralo. ¿Y que no sea regular, pero su complementario sí lo sea?
2. Inventa un método sistemático y automatizable que, dadas dos expresiones regulares e_1 y e_2, determine si el lenguaje caracterizado por e_1 es el complementario del lenguaje caracterizado por e_2. Para ello hay que hacer uso de algoritmos vistos en clase.

Ejercicio 11 (Kozen 88) Dadas dos cadenas x e y, *barajar*(x, y) es el conjunto de cadenas que se pueden obtener intercalando las posiciones de x y de y de cualquier manera. Por ejemplo, *barajar*$(01, 110) =$ *barajar*$(110, 01) = \{01110, 01101, 11001, 10110, 11010, 10101\}$. Si L_1 y L_2 son lenguajes, se define *barajar*$(L_1, L_2) = \{$*barajar*$(x, y) \mid x \in L_1, y \in L_2\}$. Demuestra que si L_1 es incontextual y L_2 es regular, entonces *barajar*(L_1, L_2) es incontextual.